BAC 2000 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = (\text{Log } x)^n$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ et calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$.

b- Déterminer, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et la limite de f_n à droite en 0.

2)a- Déterminer les positions relatives des deux courbes (C_2) et (C_3).

b- Construire (C_2) et (C_3) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3) On pose $I_n = \int_1^e (\text{Log } x)^n dx$

a) Montrer que $I_2 = e - 2$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$

c) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_2) et (C_3).

4)a) Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs et qu'elle est décroissante.

b) Déduire de la question **3) b)** que : $\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$(E) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$

où m est un paramètre réel .

1)a) Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .

b) Calculer en fonction de m les deux autres racines.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A,B,M' et M" d'affixes respectives 2i, $-2-2i$, $-1-im$ et $-1+im$.

a) Montrer que AM'BM" est un parallélogramme.

b) Déterminer m pour que AM'BM" soit un rectangle.